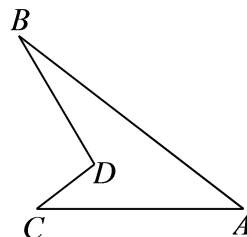


第3讲 三角形倒角模型（练习）

一、基本模型

1. 如图， $\angle BDC = 98^\circ$ ， $\angle C = 38^\circ$ ， $\angle A = 37^\circ$ ， $\angle B$ 的度数是（ ）。



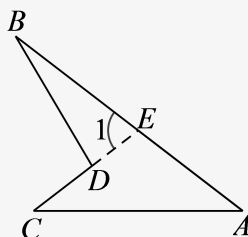
- A. 23° B. 27° C. 33° D. 37°

【答案】A

【解析】如图，延长CD交AB于E，

$$\because \angle C = 38^\circ, \angle A = 37^\circ,$$

$\therefore$



$$\angle 1 = \angle C + \angle A = 38^\circ + 37^\circ = 75^\circ,$$

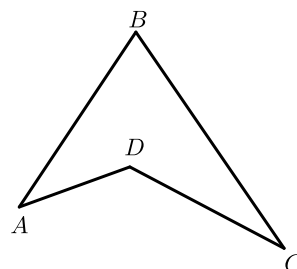
$$\because \angle BDC = 98^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle BDC - \angle 1 = 98^\circ - 75^\circ = 23^\circ.$$

故选A.

【标注】【知识点】燕尾形（飞镖型）

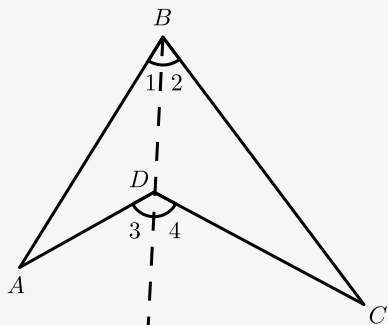
2. 如图， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 40^\circ$ ， $\angle ADC = 3\angle A$ ，则 $\angle A$ 的度数为（ ）。



- A. 80° B. 30° C. 50° D. 无法确定

【答案】C

【解析】如图所示，连接 BD 并延长，



$\therefore \angle 3$ 是 $\triangle ABD$ 的外角， $\angle 4$ 是 $\triangle BCD$ 的外角，

$\therefore \angle 1 + \angle A = \angle 3$ ①， $\angle 2 + \angle C = \angle 4$ ②，

①+②得， $(\angle 1 + \angle 2) + \angle A + \angle C = (\angle 3 + \angle 4)$ ，即 $\angle ABC + \angle A + \angle C = \angle ADC$

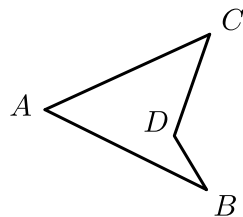
$\therefore \angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 40^\circ$ ， $\angle ADC = 3\angle A$ ，

$\therefore 60^\circ + \angle A + 40^\circ = 3\angle A$ ，解得 $\angle A = 50^\circ$ 。

故选C。

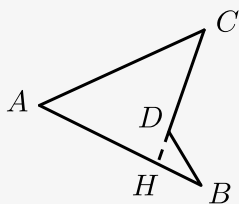
【标注】【知识点】燕尾形（飞镖型）

3. 如图， $\angle BDC = 130^\circ$ ， $\angle A = 40^\circ$ ， $\angle B + \angle C$ 的大小是 _____。



【答案】 90°

【解析】延长 BD 交 AC 于 H ，



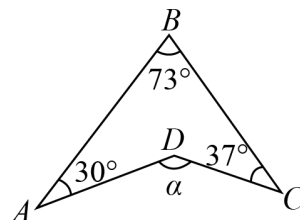
$\therefore \angle BDC = \angle DHC + \angle C$ ， $\angle DHC = \angle A + \angle B$ ，

$\therefore \angle BDC = \angle A + \angle B + \angle C$ ，

$\therefore \angle BDC = 130^\circ$, $\angle A = 40^\circ$,
 $\therefore \angle B + \angle C = 130^\circ - 40^\circ = 90^\circ$.
 故答案为 : 90° .

【标注】【知识点】燕尾形（飞镖型）

4. 如下图，求 $\angle\alpha$ 的度数为 _____ $^\circ$.

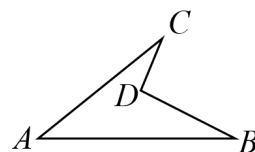


【答案】 140

【解析】由飞镖模型： $\angle\alpha = \angle A + \angle B + \angle C = 30^\circ + 73^\circ + 37^\circ = 140^\circ$.

【标注】【知识点】燕尾形（飞镖型）

5. 一个合格的零件如图所示，工人师傅量得 $\angle A = 47^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle BDC = 100^\circ$, 则 $\angle C =$ _____ .



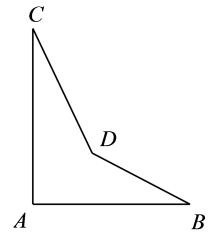
【答案】 23°

【解析】由飞镖模型：

$$\begin{aligned}
 \angle D &= \angle A + \angle B + \angle C , \\
 \therefore \angle C &= \angle D - \angle A - \angle B , \\
 &= 100^\circ - 47^\circ - 30^\circ , \\
 &= 23^\circ .
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】燕尾形（飞镖型）

6. 一个零件的形状如图所示，按规定要使得 $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 25^\circ$, $\angle B = 25^\circ$, 现检验量得 $\angle BDC = 150^\circ$, 请问：这个零件合格吗？运用三角形的有关知识说明理由 .



【答案】 这个零件不合格，证明见解析．

【解析】 这个零件不合格．

理由：如图，连接 AD 延长到 E 点，

$\therefore \angle CDE$ 是 $\triangle ADC$ 的外角， $\angle BDE$ 是 $\triangle ABD$ 的外角，

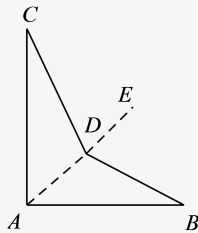
$\therefore \angle CDE = \angle C + \angle CAD$ ， $\angle BDE = \angle B + \angle DAB$ ，

$\therefore \angle BDC = \angle CDE + \angle BDE = \angle C + \angle CAD + \angle B + \angle DAB$ ，

即 $\angle BDC = \angle B + \angle C + \angle A = 25^\circ + 25^\circ + 90^\circ = 140^\circ$ ，

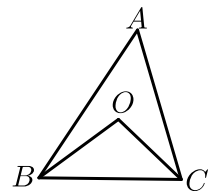
但检验员已量得 $\angle BDC = 150^\circ$ ，

$\therefore$ 可以判断这个零件不合格．



【标注】 【知识点】 三角形-外角角分线

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 50^\circ$ ，点 O 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\angle ABO = 20^\circ$ ， $\angle ACO = 30^\circ$ ，求 $\angle BOC$ 的度数．



【答案】 $\angle BOC = 100^\circ$ ．

【解析】 延长 CO 交 AB 与点 K ，

$\therefore \angle A = 50^\circ$ ， $\angle ACO = 30^\circ$ ，

在 $\triangle AKC$ 中， $\angle AKC + \angle A + \angle ACO = 180^\circ$ ，

$$\therefore \angle AKO = 100^\circ,$$

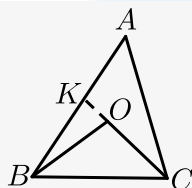
$$\therefore \angle BKO = 80^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle ABO = 20^\circ,$$

$\therefore$

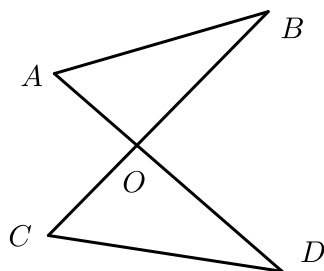
$$\angle KOB = 180^\circ - 80^\circ - 20^\circ = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$



【标注】【知识点】三角形内角和的应用

8. 如图，证明： $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$.



【答案】证明见解析 .

【解析】由外角定理： $\angle BOD = \angle A + \angle B$ ， $\angle BOD = \angle C + \angle D$ ，故 $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$.

【标注】【知识点】蝴蝶型（8字倒角）

9. 如图1，已知线段AB、CD相交于点O，连接AC、BD，则我们把形如这样的图形称为“8字型” .

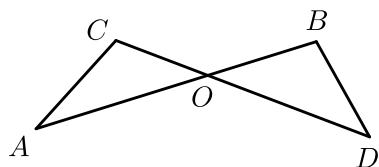


图 1

(1) 求证： $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

(2) 如图2，若 $\angle CAB$ 和 $\angle BDC$ 的平分线AP和DP相交于点P，且与CD、AB分别相交于点M、N .

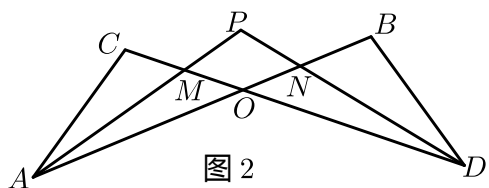


图 2

① 以线段AC为边的“8字型”有 _____ 个，以点O为交点的“8字型”有 _____ 个 .

② 若 $\angle B = 100^\circ$, $\angle C = 120^\circ$, 求 $\angle P$ 的度数.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) ① 3; 4

② 110° .

【解析】 (1) 在图1中, 有 $\angle A + \angle C = 180^\circ - \angle AOC$,

$$\angle B + \angle D = 180^\circ - \angle BOD,$$

$$\because \angle AOC = \angle BOD,$$

$$\therefore \angle A + \angle C = \angle B + \angle D.$$

(2) ① 以线段 AC 为边的“8字型”有 $AC - M - PD$, $AC - O - ND$,

$AC - O - BD$, 共3个;

以点 O 为交点的“8字型”有 $AC - O - ND$, $AC - O - BD$,

$AM - O - ND$, $AM - O - BD$, 共4个.

② 在以 M 为交点的“8字型”中, 有 $\angle P + \angle CDP = \angle C + \angle CAP$,

在以 N 为交点的“8字型”中, 有 $\angle P + \angle BAP = \angle B + \angle BDP$,

$$\therefore 2\angle P + \angle BAP + \angle CDP = \angle B + \angle C + \angle CAP + \angle BDP,$$

$\therefore AP$ 、 DP 分别平分 $\angle CAB$ 和 $\angle BDC$,

$$\therefore \angle BAP = \angle CAP, \angle CDP = \angle BDP,$$

$$\therefore 2\angle P = \angle B + \angle C,$$

$$\because \angle B = 100^\circ, \angle C = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle P = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{1}{2}(100^\circ + 120^\circ) = 110^\circ.$$

【标注】【知识点】角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

10. 如图1, 线段 AB 、 CD 相交于点 O , 连接 AD 、 CB , 我们把形如图1的图形称之为“8字形”. 如图2, 在图1的条件下, $\angle DAB$ 和 $\angle BCD$ 的平分线 AP 和 CP 相交于点 P , 并且与 CD 、 AB 分别相交于 M 、 N . 试解答下列问题:

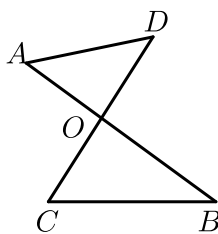


图 1

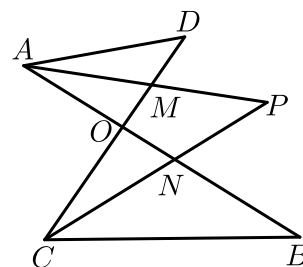


图 2

- (1) 在图1中, 请直接写出 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 之间的数量关系: _____ .
- (2) 仔细观察, 在图2中“8字形”的个数: _____ 个.
- (3) 图2中, 当 $\angle D = 40^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ 时, 求 $\angle P$ 的度数.
- (4) 图2中 $\angle D$ 和 $\angle B$ 为任意角时, 其他条件不变, 试问 $\angle P$ 与 $\angle D$ 、 $\angle B$ 之间存在着怎样的数量关系. (直接写出结果, 不必证明)

【答案】 (1) $\angle A + \angle D = \angle C + \angle B$

(2) 6

(3) 35° .

(4) $2\angle P = \angle D + \angle B$.

【解析】 (1) $\because \angle A + \angle D + \angle AOD = \angle C + \angle B + \angle BOC = 180^\circ$, $\angle AOD = \angle BOC$,

$$\therefore \angle A + \angle D = \angle C + \angle B.$$

故答案为: $\angle A + \angle D = \angle C + \angle B$.

(2) ①线段 AB 、 CD 相交于点 O , 形成“8字形”;

②线段 AN 、 CM 相交于点 O , 形成“8字形”;

③线段 AB 、 CP 相交于点 N , 形成“8字形”;

④线段 AB 、 CM 相交于点 O , 形成“8字形”;

⑤线段 AP 、 CD 相交于点 M , 形成“8字形”;

⑥线段 AN 、 CD 相交于点 O , 形成“8字形”;

故“8字形”共有6个;

故答案为: 6.

(3) $\angle DAP + \angle D = \angle P + \angle DCP$, ①

$$\angle PCB + \angle B = \angle PAB + \angle P, \text{ ②}$$

$\because \angle DAB$ 和 $\angle BCD$ 的平分线 AP 和 CP 相交于点 P ,

$$\therefore \angle DAP = \angle PAB, \angle DCP = \angle PCB,$$

$$\text{①} + \text{②} \text{得: } \angle DAP + \angle D + \angle PCB + \angle B$$

$$= \angle P + \angle DCP + \angle PAB + \angle P,$$

$$\text{即 } 2\angle P = \angle D + \angle B,$$

$$\text{又 } \because \angle D = 40^\circ, \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore 2\angle P = 40^\circ + 30^\circ,$$

$$\therefore \angle P = 35^\circ.$$

(4) 关系: $2\angle P = \angle D + \angle B$.

由“8字型”得, $\angle D + \angle 1 + \angle 2 = \angle B + \angle 3 + \angle 4$, ①

$$\angle B + \angle 4 = \angle P + \angle 2, \textcircled{2}$$

又 $\because AC$ 、 CP 分别是 $\angle DAB$ 、 $\angle BCD$ 的平分线，

$$\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4,$$

①+② $\times 2$ 得，

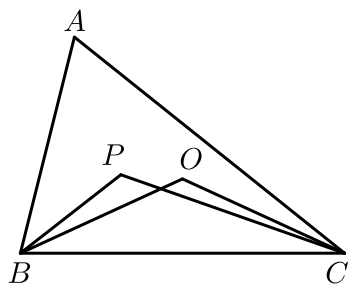
$$\angle D + \angle 1 + \angle 2 + 2\angle B + 2\angle 4 = \angle B + \angle 3 + \angle 4 + 2\angle P + 2\angle 2,$$

$$\therefore 2\angle P = \angle D + \angle B.$$

【标注】【知识点】蝴蝶型（8字倒角）

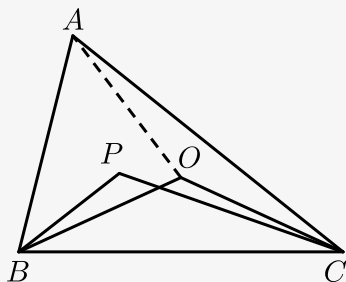
二、角平分线模型

11. 如图，点 P 是三个内角平分线的交点，点 O 是三边垂直平分线的交点，若 $\angle BPC = 115^\circ$ ，则 $\angle BOC = \underline{\quad\quad}^\circ$ 。



【答案】 100

【解析】 如图，连接 OA ，



$\because$ 点 P 是三个内角平分线的交点，

$$\therefore \angle PBC = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle PCB = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\therefore \angle BPC = 180^\circ - \angle PBC - \angle PCB$$

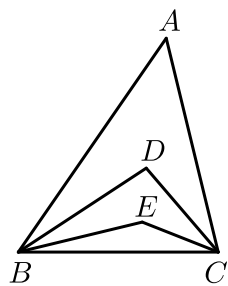
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC - \frac{1}{2}\angle ACB$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$

$$\begin{aligned}
&= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) \\
&= 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC \\
&= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC, \\
&\text{又} \because \angle BPC = 115^\circ, \\
&\therefore \angle BAC = 50^\circ, \\
&\because \text{点} D \text{是三边垂直平分线的交点}, \\
&\therefore OA = OB = OC, \\
&\therefore \angle OAC = \angle OCA, \angle OAB = \angle OBA, \angle OBC = \angle OCB, \\
&\because \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ, \\
&\therefore \angle OAC + \angle OCA + \angle OAB + \angle OBA + \angle OBC + \angle OCB \\
&= 2(\angle OAC + \angle OAB + \angle OBC) \\
&= 2(\angle BAC + \angle OBC) = 180^\circ, \\
&\therefore \angle BAC + \angle OBC = 90^\circ, \\
&\therefore \angle OBC = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ, \\
&\therefore \angle BOC = 180^\circ - 2\angle OBC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.
\end{aligned}$$

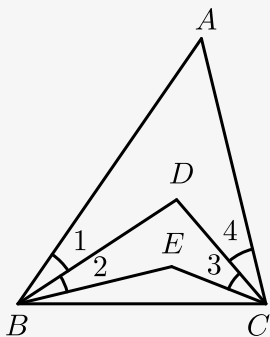
【标注】【知识点】三角形-内角角分线

12. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 50^\circ$ ， E 是 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle BEC = 150^\circ$ ， $\angle ABE$ 的平分线与 $\angle ACE$ 的平分线相交于点 D ，则 $\angle BDC$ 的度数为 _____。



【答案】 100°

【解析】如图所示，



在 $\triangle BEC$ 中, $\because \angle BEC = 150^\circ$,

$\therefore \angle EBC + \angle ECB = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

在 $\triangle ABC$ 中, $\because \angle A = 50^\circ$,

$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$,

$\therefore$

$\angle ABE + \angle ACE = (\angle ABC + \angle ACB) - (\angle EBC + \angle ECB) = 130^\circ - 30^\circ = 100^\circ$

.

$\because BD, CD$ 分别平分 $\angle ABE$ 和 $\angle ACE$,

$\therefore \angle 2 = \frac{1}{2} \angle ABE, \angle 3 = \frac{1}{2} \angle ACE$,

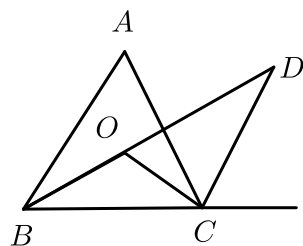
$\therefore \angle 2 + \angle 3 = \frac{1}{2} (\angle ABE + \angle ACE) = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ$,

$\therefore \angle DBC + \angle DCB = (\angle 2 + \angle 3) + (\angle EBC + \angle ECB) = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$,

$\therefore \angle BDC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

【标注】【知识点】三角形-内角角分线

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC, \angle ACB$ 的平分线交于点 O , D 是外角与内角平分线交点, 若 $\angle BOC = 120^\circ$, 则 $\angle D =$ ().



A. 15°

B. 20°

C. 25°

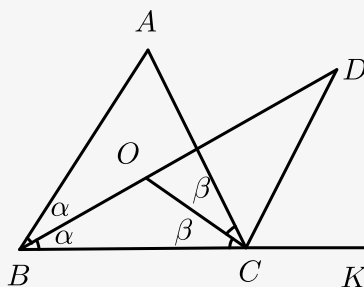
D. 30°

【答案】 D

【解析】 由题: $\angle ABO = \angle CBO, \angle ACO = \angle BCO, \angle ACD = \angle KCD$,

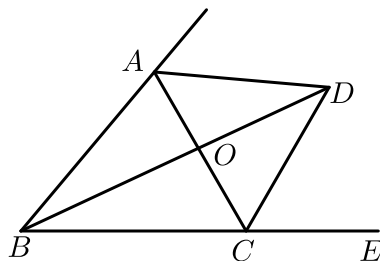
设 $\angle ABO = \alpha, \angle ACO = \beta$,

则 $\angle CBO = \alpha$, $\angle BCO = \beta$,
 $\angle ACD = \angle KCD = 90^\circ - \beta$,
 在 $\triangle BOC$ 中,
 $\alpha + \beta + 120^\circ = 180^\circ$,
 $\therefore \alpha + \beta = 60^\circ$,
 在 $\triangle BCD$ 中,
 $\therefore \angle D + \alpha = 90^\circ - \beta$,
 $\therefore \angle D = 90^\circ - (\alpha + \beta) = 30^\circ$.
 故选 D.



【标注】【知识点】三角形-内外角角分线

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$, 点 E 在 BC 的延长线上, $\angle ABC$ 的平分线 BD 与 $\angle ACE$ 的平分线 CD 相交于点 D , 连接 AD , 下列结论中不正确的是 ().



- A. $\angle BAC = 70^\circ$ B. $\angle DOC = 90^\circ$ C. $\angle BDC = 35^\circ$ D. $\angle DAC = 55^\circ$

【答案】 B

【解析】 A 选项: $\because \angle ABC = 50^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$,

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ,$$

正确.

B 选项: $\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABO = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \times 50^\circ = 25^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle ABO \text{ 中, } \angle AOB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABO = 180^\circ - 70^\circ - 25^\circ = 85^\circ,$$

$$\therefore \angle DOC = \angle AOB = 85^\circ,$$

错误.

C 选项: $\because CD$ 平分 $\angle ACE$,

$$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2} \angle ACE = \frac{1}{2} (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 180^\circ - \angle DOC - \angle ACD = 180^\circ - 85^\circ - 60^\circ = 35^\circ,$$

正确 .

D 选项 : $\because BD$ 、 CD 分别是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACE$ 的平分线 ,

$\therefore AD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角平分线 ,

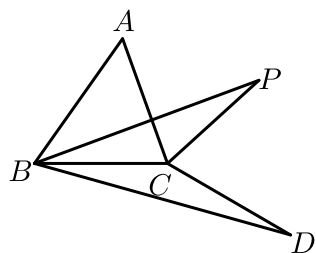
$$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2}(180^\circ - 70^\circ) = 55^\circ ,$$

正确 .

故选 B .

【标注】【知识点】三角形-内外角角分线

15. 如图 , $\angle ABD$, $\angle ACD$ 的角平分线交于点 P , 若 $\angle A = 50^\circ$, $\angle D = 10^\circ$, 则 $\angle P$ 的度数为 () .



A. 15°

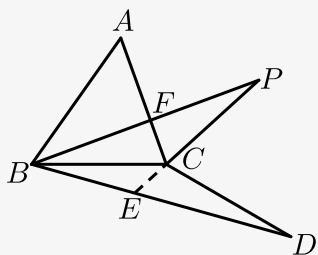
B. 20°

C. 25°

D. 30°

【答案】 B

【解析】 延长 PC 交 BD 于 E , 设 AC 、 PB 交于 F ,



$$\because \angle A + \angle ABF + \angle AFB = \angle P + \angle PCF + \angle PFC = 180^\circ ,$$

$$\because \angle AFB = \angle PFC ,$$

$$\therefore \angle P + \angle PCF = \angle A + \angle ABF ,$$

$$\because \angle P + \angle PBE = \angle PED , \angle PED = \angle PCD - \angle D ,$$

$$\therefore \angle P + \angle PBE = \angle PCD - \angle D ,$$

$$\therefore 2\angle P + \angle PCF + \angle PBE = \angle A - \angle D + \angle ABF + \angle PCD ,$$

$\because PB$ 、 PC 是角平分线

$$\therefore \angle PCF = \angle PCD , \angle ABF = \angle PBE ,$$

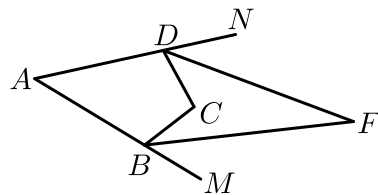
$$\therefore 2\angle P = \angle A - \angle D$$

$$\therefore \angle A = 50^\circ, \angle D = 10^\circ,$$

$$\therefore \angle P = 20^\circ.$$

【标注】【知识点】三角形-内外角角分线

16. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = x$ ， $\angle C = y$ ($0^\circ < x < 180^\circ, 0^\circ < y < 180^\circ$)。 $\angle DFB$ 为四边形 $ABCD$ 的 $\angle ABC$ 、 $\angle ADC$ 相邻的外角平分线所在直线构成的锐角，若 $x + y = 120^\circ$ ， $\angle DFB = 20^\circ$ ，则 x 的值为（ ）。



A. 20°

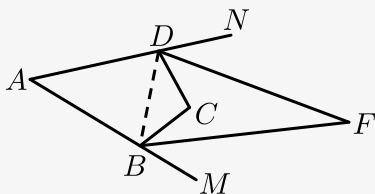
B. 30°

C. 40°

D. 50°

【答案】C

【解析】连接 DB ，



$$\therefore \angle A = x, \angle C = y,$$

$$\therefore \angle A + \angle C + \angle ADC + \angle ABC = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 360^\circ - x - y,$$

$$\therefore \angle CDN + \angle CBM = 360^\circ - (360^\circ - x - y) = x + y.$$

$$\therefore BF, DF \text{ 平分 } \angle CBM, \angle CDN,$$

$$\therefore \angle CDF + \angle CBF = \frac{1}{2}(x + y),$$

$$\therefore \angle CBD + \angle CDB = 180^\circ - y,$$

$$\angle FBD + \angle FDB = 180^\circ - y + \frac{1}{2}(x + y) = 180^\circ - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \angle DFB = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x = 20^\circ.$$

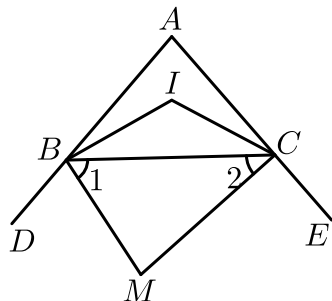
$$\therefore \begin{cases} x + y = 120^\circ \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x = 20^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \text{解得} \begin{cases} x = 40^\circ \\ y = 80^\circ \end{cases}.$$

故选C .

【标注】【知识点】三角形-内外角角分线

17. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 100^\circ$, BI 、 CI 分别平分 $\angle ABC$, $\angle ACB$, 则 $\angle BIC = \underline{\hspace{2cm}}$, 若 BM 、 CM 分别是 $\angle ABC$, $\angle ACB$ 的外角平分线, 则 $\angle M = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 140° ; 40°

【解析】 $\because \angle A = 100^\circ$,

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ,$$

$\because BI$ 、 CI 分别平分 $\angle ABC$, $\angle ACB$,

$$\therefore \angle IBC = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle ICB = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\therefore \angle IBC + \angle ICB = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB$$

$$= \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$

$$= \frac{1}{2} \times 80^\circ$$

$$= 40^\circ,$$

$$\therefore \angle I = 180^\circ - (\angle IBC + \angle ICB) = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ;$$

$$\because \angle ABC + \angle ACB = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC + \angle ECB = 180^\circ - \angle ABC + 180^\circ - \angle ACB$$

$$= 360^\circ - (\angle ABC + \angle ACB)$$

$$= 360^\circ - 80^\circ$$

$$= 280^\circ,$$

$\because BM$ 、 CM 分别是 $\angle ABC$, $\angle ACB$ 的外角平分线,

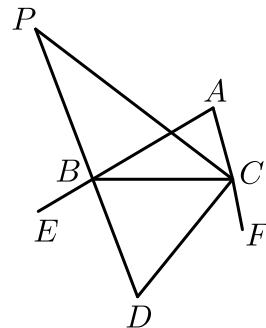
$$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2}\angle DBC, \angle 2 = \frac{1}{2}\angle ECB,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2} \times 280^\circ = 140^\circ,$$

$$\therefore \angle M = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 = 40^\circ.$$

故答案为: 140° ; 40° .

18. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \angle ACB$ ， CP 平分 $\angle ACB$ ， BD 、 CD 分别为 $\triangle ABC$ 的两外角的平分线， CP 平分 $\angle ACB$ 与 DB 延长线交于点 P ．给出下列结论：① $CP \perp CD$ ；② $\angle D = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ ；③ $PD \parallel AC$ ．其中正确结论的个数是（ ）．



- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

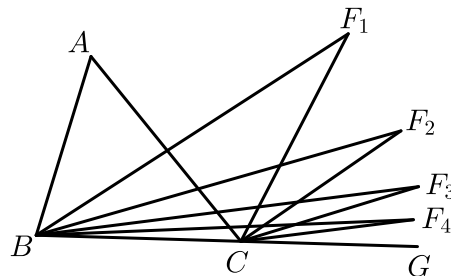
【答案】D

【解析】 $\because CP$ 平分 $\angle ACB$ ， CD 平分 $\angle BCF$ ，
 $\therefore \angle PCB = \frac{1}{2}\angle ACB$ ， $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BCF$ ，
 $\therefore \angle PCD = \angle PCB + \angle BCD$
 $= \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle BCF$
 $= \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$ ，
 $CP \perp CD$ ，①正确；
 $\angle A = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB$
 $= 180^\circ - (180^\circ - \angle CBE) - (180^\circ - \angle BCF)$
 $= \angle CBE + \angle BCF - 180^\circ$ ，
 $\because BD$ 是 $\angle CBE$ 的平分线，
 $\therefore \angle CBE + \angle BCF - 180^\circ$
 $= 2\angle CBD + 2\angle BCD - 180^\circ$
 $= 2(180^\circ - \angle D) - 180^\circ$ ，
 $\therefore \angle D = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ ，②正确，
 $\because \angle A = \angle ACB$ ，
 $\therefore \angle D = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB$
 $= 90^\circ - \angle PCB$
 $= \angle BCD$

$= \angle DCF$,
 $\therefore PD \parallel AC$, ③正确 .

【标注】【知识点】三角形内角和的应用

19. 若 $\angle ABC$ 与 $\angle ACG$ 的平分线交于 F_1 , $\angle F_1BC$ 与 $\angle F_1CG$ 的平分线交于 F_2 , 如此下去 , $\angle F_2BC$ 与 $\angle F_2CG$ 的平分线交于 F_3 , F_n 与 $\angle A$ 的数量关系是 _____ .



【答案】 $\angle A = 2^n \angle F_n$

【解析】 在 $\triangle F_1BC$ 中 , 可得 $\angle F_1CG = \angle F_1 + \angle F_1BC$,

$$\therefore 2\angle F_1CG = 2\angle F_1 + 2\angle F_1BC ,$$

在 $\triangle ABC$ 中 , 可得 $\angle ACG = \angle ABC + \angle A$,

$\because BF_1$ 为 $\angle ABC$ 的角平分线 , CF_1 为外角 $\angle ACG$ 的角平分线 ,

$$\therefore \angle ACG = 2\angle F_1CG , \angle ABC = 2\angle F_1BC ,$$

$$\therefore 2\angle F_1CG = 2\angle F_1BC + \angle A ,$$

$$\therefore \angle A = 2\angle F_1 ,$$

同理可知 $\angle F_1 = 2\angle F_2$, $\angle F_2 = 2\angle F_3$, $\dots$,

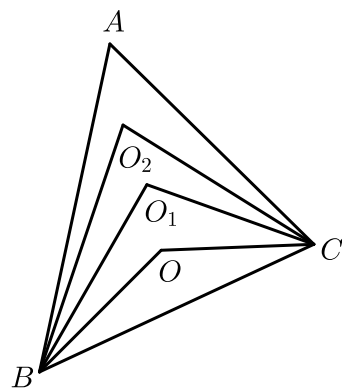
$$\therefore \angle A = 2\angle F_1 = 4\angle F_2 = \dots = 2^n \angle F_n ,$$

即 $\angle A = 2^n \angle F_n$.

故答案为 : $\angle A = 2^n \angle F_n$.

【标注】【知识点】三角形-内外角角分线

20. 如图 , 已知 $\triangle ABC$ 中 , $\angle A = 60^\circ$, 点 O 为 $\triangle ABC$ 内一点 , 且 $\angle BOC = 140^\circ$, 其中 O_1B 平分 $\angle ABO$, O_2B 平分 $\angle ABO_1$, O_2C 平分 $\angle ACO_1$... O_nB 平分 $\angle ABO_{n-1}$, O_nC 平分 $\angle ACO_{n-1}$...以此类推 , 则 $\angle BO_1C =$ _____ , $\angle BO_{2017}C =$ _____ .



【答案】 $100^\circ ; 60^\circ + \frac{80^\circ}{2^{2017}}$

【解析】 $\angle BOC = 140^\circ$,

则 $\angle OBC + \angle OCB = 40^\circ$,

又 $\angle O_1BO + \angle O_1CO = 40^\circ$,

则 $\angle BO_1C = 100^\circ$.

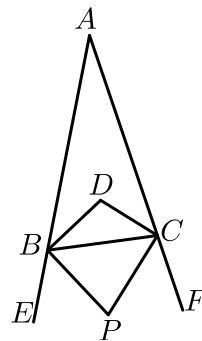
计算得 $\angle BO_1C = 100^\circ = 60^\circ + \frac{80^\circ}{2^1}$,

$\angle BO_2C = 80^\circ = 60^\circ + \frac{80^\circ}{2^2}$, $\angle BO_3C = 70^\circ = 60^\circ + \frac{80^\circ}{2^3}$,

则 $\angle BO_{2017}C = 60^\circ + \frac{80^\circ}{2^{2017}}$.

【标注】 【知识点】 三角形-内角角分线

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BD 、 CD 是内角平分线， BP 、 CP 是 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的外角平分线。



(1) 若 $\angle A = 30^\circ$ ，求 $\angle D$ 、 $\angle P$ 的度数。

(2) 不论 $\angle A$ 为多少时，探索 $\angle D + \angle P$ 的值是变化还是不变化，为什么？

【答案】 (1) $\angle D = 105^\circ$;

$\angle P = 75^\circ$.

(2) 不变；证明见解析。

【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A$,

$\because BD$ 、 CD 分别是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的角平分线,

$$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle DCB = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\therefore \angle DBC + \angle DCB$$

$$= \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A)$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A.$$

在 $\triangle BCD$ 中,

$$\angle D = 180^\circ - (\angle DBC + \angle DCB)$$

$$= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle A\right)$$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$$

$$= 90^\circ + 15^\circ$$

$$= 105^\circ.$$

$\because BP$ 、 CP 分别是 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的外角平分线,

$$\therefore \angle CBP = \frac{1}{2}\angle CBE, \angle BCP = \frac{1}{2}\angle BCF,$$

$$\therefore \angle CBP + \angle BCP = \frac{1}{2}\angle CBE + \frac{1}{2}\angle BCF$$

$$= \frac{1}{2}(\angle CBE + \angle BCF)$$

$$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle ACB + \angle A + \angle ABC)$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ + \angle A),$$

$$\therefore \angle P = 180^\circ - (\angle CBP + \angle BCP) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ + \angle A)$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2} \times 30^\circ$$

$$= 75^\circ.$$

(2) $\angle D + \angle P$ 的值不变.

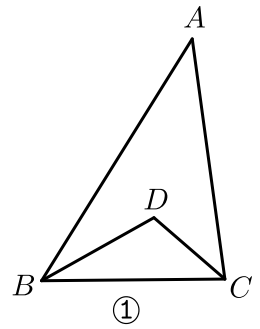
$$\text{由(1)得, } \angle D = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A, \angle P = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\therefore \angle D + \angle P = 180^\circ.$$

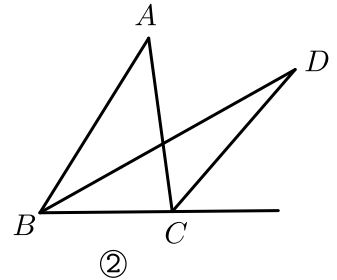
【标注】【知识点】三角形-内外角角分线

22.

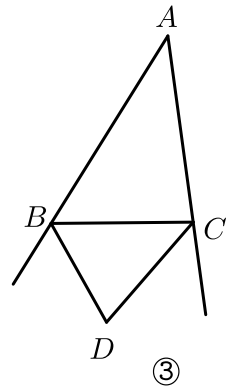
(1) 如图①, $\triangle ABC$ 中, DC , BD 分别是 $\angle ACB$ 和 $\angle ABC$ 的平分线, 且 $\angle A = \alpha$ 用含 α 的代数式表示 _____.



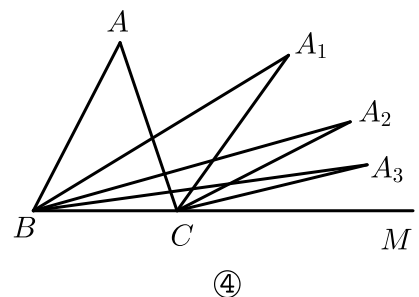
(2) 如图②中 DC 为 $\angle ACB$ 的外角的平分线, 用含 α 的代数式表示 $\angle CDB$ _____ .



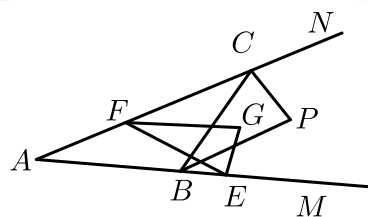
(3) 如图③ DC , BD 分别是 $\angle ACB$ 和 $\angle ABC$ 的外角的平分线, 用含 α 的代数式表示 $\angle CDB$ _____ .



(4) 如图④, $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 64^\circ$, 分别作 $\angle ABC$ 的角平分线 BA_1 和 $\angle ACM$ 角平分线 CA_1 , 两线相交于点 A_1 ; 同样, 作 $\angle A_1BC$ 的角平分线 BA_2 , 和 $\angle A_1CM$ 角平分线 CA_2 , 两线相交于点 A_2 , 依次类推……, 则 $\angle A_6 =$ _____ 度 .



(5) 如图⑤, G 是 $\triangle AFE$ 两外角平分线的交点, P 是 $\triangle ABC$ 的两外角平分线的交点, F , C 在 AN 上, 又 B , E 在 AM 上, 如果 $\angle FGE = 58^\circ$, 那么 $\angle P =$ _____ .



⑤

【答案】(1) $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$

(2) $\frac{1}{2}\alpha$

(3) $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$

(4) 1

(5) 58

【解析】(1) $\because BD$ 平分 $\angle ABC$, CD 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC,$$

$$\angle DCB = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\because \angle A = \alpha,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle DBC + \angle DCB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$

$$= \frac{1}{2} \times (180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\therefore \angle CDB = 180^\circ - (\angle DBC + \angle DCB)$$

$$= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha.$$

(2) $\because \angle ACM = \angle A + \angle ABC$, DC 平分 $\angle ACM$,

$$\therefore \angle DCM = \frac{1}{2}\angle ACM = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\angle ABC,$$

$$\because \angle DCM = \angle DBC = \angle CDB,$$

$$\therefore \angle CDB = \angle DCM - \angle DBC = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\angle ABC - \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\alpha.$$

(3) $\because BD$ 平分 $\angle CBR$, CD 平分 $\angle BCK$,

$$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2}\angle CBR,$$

$$\angle DCB = \frac{1}{2}\angle BCK,$$

$$\because \angle CBR = \angle A + \angle ACB,$$

$$\angle BCK = \angle A + \angle ABC,$$

$$\therefore \angle CBR + \angle BCK = 180^\circ + \angle A = 180^\circ + \alpha,$$

$$\therefore \angle DBC + \angle DCB = \frac{1}{2}(\angle CBR + \angle BCK) = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\therefore \angle CDB = 180^\circ - (\angle DBC + \angle DCB) = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{1}{2}\alpha\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$$

(4) 由 (2) 可知, $\angle A_1 = \frac{1}{2}\angle A = 32^\circ$,

$$\angle A_2 = \frac{1}{2}\angle A_1 = 16^\circ,$$

$$\angle A_3 = \frac{1}{2}\angle A_2 = 8^\circ,$$

$$\angle A_4 = \frac{1}{2}\angle A_3 = 4^\circ,$$

$$\angle A_5 = \frac{1}{2}\angle A_4 = 2^\circ,$$

$$\angle A_6 = \frac{1}{2}\angle A_5 = 1^\circ.$$

(5) 由 (3) 可知, $\angle EGF = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = 58^\circ$,

$$\therefore \angle A = 64^\circ,$$

$$\angle BPC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = 58^\circ,$$

$$\text{即 } \angle P = 58^\circ.$$

【标注】【知识点】三角形-内外角角分线